ملاحظة: في حالة معادلة الصدام ①، ② تام نظرية الصدام
أما معادلة الصدام تستخدم ③.

مثال: ليكن لدينا m_1 , m_2

A_1 , A_2

$\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ السرعة قبل الصدم مباشرة (قبل)

$\vec{W}_1$, $\vec{W}_2$ السرعة بعد الصدام مباشرة (بعد)

$$\Rightarrow \frac{d\vec{P}(S)}{dT} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{P}(S) = \text{const}$$

بعد التعويض نجد

$$\Rightarrow m_1\vec{V}(A_1/R_0) + m_2\vec{V}(A_2/R_0) = m_1\vec{W}(A_1/R_0) + m_2\vec{W}(A_2/R_0)$$

$$\Rightarrow m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 = m_1\vec{W}_1 + m_2\vec{W}_2$$

معادلة الصدم ①

نأخذ الحركة نسبة لمركز الكتلة

$$m_1\vec{V}(A_1/R_G) + m_1\vec{V}(G/R_0) + m_2\vec{V}(A_2/R_G) + m_2\vec{V}(G/R_0) =$$

$$m_1\vec{W}(A_1/R_G) + m_1\vec{W}(G/R_0) + m_2\vec{W}(A_2/R_G) + m_2\vec{W}(G/R_0)$$

مركز

$$\Rightarrow (m_1+m_2)\vec{V}(G) = (m_1+m_2)\vec{W}(G)$$

$$\Rightarrow 0 = m_1\vec{V}(A_1/R_G) + m_2\vec{V}(A_2/R_G) = m_1\vec{W}(A_1/R_G) + m_2\vec{W}(A_2/R_G)$$

$A_1 + A_2 = G$ مركز الصدم عام

$$\Rightarrow \vec{V}(G/R_G) = 0 \Rightarrow (m_1+m_2)\vec{V}(G/R_G) = 0$$

② أثناء التصادم الكامل

A l Aziz

نرمز بـ $\vec{\omega}_{G_1}$ لـ $\vec{\omega}(A_1/R_G)$

و $\vec{\omega}_{G_2}$ لـ $\vec{\omega}(A_2/R_G)$

وبالتالي:

$$\left.\begin{array}{l} m_1\vec{V}_{G_1} + m_2\vec{V}_{G_2} = 0 \\ m_1\vec{\omega}_{1G} + m_2\vec{\omega}_{2G} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} m_1\vec{V}_{G_1} = -m_2\vec{V}_{G_2} \\ m_1\vec{\omega}_{G_1} = -m_2\vec{\omega}_{G_2} \end{array}\right\} \circledast$$

ولكن نعلم أنه من خواص التناسب في المعادلات:

$$\Rightarrow \frac{\vec{V}_{G_1}}{\frac{1}{m_1}} = \frac{-\vec{V}_{G_2}}{\frac{1}{m_2}} = \frac{\vec{V}_{G_1} - \vec{V}_{G_2}}{\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}}$$

في نفس مرجع مع $\vec{V}(G/R_0)$ يكون: $\vec{V}_{1G} + \vec{V}(G/R_0) = \vec{V}(A_1/R_0) = \vec{V}_1$

$$\frac{\vec{V}_{G_1}}{\frac{1}{m_1}} = \frac{-\vec{V}_{G_2}}{\frac{1}{m_2}} = \frac{\vec{V}_{G_1} - \vec{V}_{G_2}}{\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}} = \frac{\vec{V}_1 - \vec{V}_2}{\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}}$$

نعيد نفس الكلام من أجل المعادلة الثانية في $\circledast$ نجد:

$$\frac{\vec{\omega}_{G_1}}{\frac{1}{m_1}} = \frac{-\vec{\omega}_{G_2}}{\frac{1}{m_2}} = \frac{\vec{\omega}_{G_1} - \vec{\omega}_{G_2}}{\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}} = \frac{\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2}{\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}}$$

- نرمز $\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}=\frac{1}{\mu}$ الكتلة المختزلة فيكون:

$$m_1\vec{V}_{G_1} = -m_2\vec{V}_{G_2} = \mu\left[\vec{V}_{G_1} - \vec{V}_{G_2}\right] = \mu(\vec{V}_1 - \vec{V}_2)$$

و $$m_1\vec{\omega}_{G_1} = -m_2\vec{\omega}_{G_2} = \mu\left[\vec{\omega}_{G_1} - \vec{\omega}_{G_2}\right] = \mu(\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2)$$

نقسم الثانية على الأولى:

النتيجة أخذ القيم المطلقة:

$$\Rightarrow \frac{|\vec{\omega}_{G_1}|}{|\vec{V}_{G_1}|} = \frac{|\vec{\omega}_{G_2}|}{|\vec{V}_{G_2}|} = \frac{|\vec{\omega}_{G_1} - \vec{\omega}_{G_2}|}{|\vec{V}_{G_1} - \vec{V}_{G_2}|} = \frac{|\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2|}{|\vec{V}_1 - \vec{V}_2|} = \lambda$$

حيث $0 \le \lambda \le 1$.

نرمز بـ $\vec{\omega}_{G_1}$ بدلاً من $\vec{\omega}(A_1/R_G)$

و $\vec{\omega}_{G_2}$ بدلاً من $\vec{\omega}(A_2/R_G)$

وبالتالي:

$$\left.\begin{array}{l} m_1\vec{V}_{G_1} + m_2\vec{V}_{G_2} = 0 \\ m_1\vec{\omega}_{1G} + m_2\vec{\omega}_{2G} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} m_1\vec{V}_{G_1} = -m_2\vec{V}_{G_2} \\ m_1\vec{\omega}_{G_1} = -m_2\vec{\omega}_{G_2} \end{array}\right\} \circledast$$

ولكن نعلم أنه من خواص التناسب من المتساويات

$$\Rightarrow \frac{\vec{V}_{G_1}}{\frac{1}{m_1}} = \frac{-\vec{V}_{G_2}}{\frac{1}{m_2}} = \frac{\vec{V}_{G_1} - \vec{V}_{G_2}}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}}$$

في حط منطبق مع $\vec{V}(G/R_0)$ فيكون: $\vec{V}_{1G} + \vec{V}(G/R_0) = \vec{V}(A_1/R_0) = \vec{V}_1$

$$\frac{\vec{V}_{G_1}}{\frac{1}{m_1}} = \frac{-\vec{V}_{G_2}}{\frac{1}{m_2}} = \frac{\vec{V}_{G_1} - \vec{V}_{G_2}}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}} = \frac{\vec{V}_1 - \vec{V}_2}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}}$$

نعيد نفس الكلام من أجل المعادلة الثانية في $\circledast$ نجد:

$$\frac{\vec{\omega}_{G_1}}{\frac{1}{m_1}} = \frac{-\vec{\omega}_{G_2}}{\frac{1}{m_2}} = \frac{\vec{\omega}_{G_1} - \vec{\omega}_{G_2}}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}} = \frac{\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}}$$

- نرمز $\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{1}{\mu}$ الكتلة المختزلة فيكون:

$$m_1\vec{V}_{G_1} = -m_2\vec{V}_{G_2} = \mu\left[\vec{V}_{G_1} - \vec{V}_{G_2}\right] = \mu(\vec{V}_1 - \vec{V}_2)$$

$$\text{و} \quad m_1\vec{\omega}_{G_1} = -m_2\vec{\omega}_{G_2} = \mu\left[\vec{\omega}_{G_1} - \vec{\omega}_{G_2}\right] = \mu(\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2)$$

نقسم الثانية على الأولى:

ونأخذ القيم المطلقة

$$\Rightarrow \frac{|\vec{\omega}_{G_1}|}{|\vec{V}_{G_1}|} = \frac{|\vec{\omega}_{G_2}|}{|\vec{V}_{G_2}|} = \frac{|\vec{\omega}_{G_1} - \vec{\omega}_{G_2}|}{|\vec{V}_{G_1} - \vec{V}_{G_2}|} = \frac{|\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2|}{|\vec{V}_1 - \vec{V}_2|} = \lambda$$

حيث $0 \le \lambda \le 1$

- من هذه العلاقة الأخيرة نجد أنه يتحتم أن $\vec{v'}$ ... $\vec{v}$ معاكسا لها وثابتا
وبما أن السرعة بعد الصدم أقل من السرعة قبل الصدم وبالتالي يسقط
أقل أو يساوي الواحد (لأنه يرافق فقدان بالطاقة شرط مقاومة الصدم)
وبالتالي λ يسمى معامل الصدم (معامل المرونة) وهو ناتج عن
طبيعة الجسمين المتصادمين.
ومن هذا المعامل يصنف الصدم على أساس قيم λ إلى ثلاثة أنواع:
١- إذا كان $\lambda = 0$ ⇐ $\vec{v'_1} - \vec{v'_2} = 0$ ⇐ $\vec{v'_1} = \vec{v'_2}$
نعوض في المعادلة ① معادلة الصدم فينتج أن الجسمان يلتحمان ويصبحان جسم
واحد وهو الصدم اللين (تام الليونة)
٢- إذا كان $0 < \lambda < 1$ يكون الصدم مرن
٣- إذا كان $\lambda = 1$ تام المرونة وهو ذلك أن الطاقة الحركية ثابتة
ولم يحدث فقد بالطاقة.

$$\lambda = \frac{|\vec{v'_2} - \vec{v'_1}|}{|\vec{v_1} - \vec{v_2}|}$$

- أصبح لدينا معادلة ثانية ②..
ولكن لا نستطيع ملاقاة المعادلة ①
بسبب وجود القيمة المطلقة..
هنا سنميز حالتين: ☺ عودة في تصحيح لأنه السوء في أغلاط
① الصدم المباشر: إذا كانت السرعتان قبل التصادم مباشرة محمولة
على خط المركزين (الناظم المشترك) يسمى هذا
التصادم مباشر وعندئذ لا داعي لقيم المطلقة للوصول
إلى المعادلة الثانية..
يصبح لدينا (بالإسقاط على الناظم المشترك):

$$-\lambda = \frac{v'_1 - v'_2}{v_1 - v_2} \quad ②$$

وهي المعادلة الثانية من معادلات الصدم

الموضوع

② **التصادم غير المباشر**: اذا كانت السرعتان قبل التصادم مباشرة تصنعان زاوية مع خط المركزين (أي مائلتين عن خط المركزين) سمي هذا التصادم تصادم غير مباشر

العمودي المشترك $\vec{t}$

(خط المركزين) الناظم $\vec{n}$

في هذا التصادم نطبق نظرية كمية الحركة على كل نقطة على حدة.
نعتبر أن الكرتين هي نقطتان ماديتان متحركتان ...

من أجل النقطة A_1:

$$\frac{d\vec{P_1}}{dt} = \text{قوة تأثير } A_2 + \text{مجموع القوى المؤثرة}$$

بما أن القوى الخارجية مهملة أمام قوة الصدم فيكون:

$$\frac{d\vec{P_1}}{dt} = \vec{F} \qquad \text{قوة تأثير } A_2 \text{ على } A_1$$

بالمكاملة:

$$\int d\vec{P_1} = m_1 \int_{v_1}^{w_1} dv = \int \vec{F}\, dt$$

$$\Rightarrow m_1\vec{W_1} - m_1\vec{V_1} = \int \vec{F}\, dt$$

$$\Rightarrow m_1\vec{W_1} - m_1\vec{V_1} = \vec{S}$$ الدفع الكلي لقوة الصدم

نسقط هذه العلاقة على الناظم $\vec{n}$ وعلى المماس $\vec{t}$

ALAZIZ

بالإسقاط على الناظم: (من الفرضيات أن القوة الصادمة محمولة على الناظم الأساسي)

$$\Rightarrow m_1 W_{1n} - m_1 V_{1n} = S$$

مسقط الدفع على الناظم:

[illegible]

وهو لحظة تغير في إيجاد الدفع الكلي المطبق على الكرة A_1

بالإسقاط على المماس: لا مسقط $\vec{F}$ على المماس (بفرض عدم وجود احتكاك) فقط (ترك من فرضيات الصدم)

$$\Rightarrow m_1 W_{1\tau} - m_1 V_{1\tau} = 0$$

ولكن $V_{1\tau} = V_1 \sin\alpha_1$

$W_{1\tau} = W_1 \sin\alpha_1$ ومنه

ومن الطريقة نفسها على A_2 بالتالي:

$$\frac{d\vec{P}_2}{dt} = -\vec{F}$$

قوة تأثير A_1 على A_2

قوة معاكسة لـ قوة تأثير A_2 على A_1

$$\Rightarrow \int d\vec{P}_2 = -\int \vec{F}\, dt$$

$$\Rightarrow m_2 \vec{W_2} - m_2 \vec{V_2} = -\vec{S}$$

بالإسقاط على الناظم:

$$\Rightarrow m_2 W_{2n} - m_2 V_{2n} = -S$$

بالإسقاط على المماس:

$$m_2 W_{2\tau} - m_2 V_{2\tau} = 0$$

ولكن $V_{2\tau} = V_2 \sin\alpha_2$ حسب الرسم $= V_2 \cos(\pi - \alpha_2)$

$$\Rightarrow W_{2\tau} = W_2 \sin\alpha_2$$

ما يدعى المركبات المماسية [illegible] لا توجد ملامسة [illegible] الجسم الآخر.

$$\frac{W_{1n} - W_{2n}}{V_{1n} - V_{2n}} = \lambda \quad — (*)$$

$V_{1n} = V_1 \cos \alpha_1$

$V_{2n} = -V_2 \cos \alpha_2$

نعوض في ① وحل المعادلتين ① و (*) كالمشترك
نتحصل على المركبة الناظمية لسرعة بعد الصدم.
ومن الصدم لا تعطلا المركبتين لحركة اتجاه السرعة نقسم المركبتين فنتحصل
على الناظمية [illegible] بعد الصدم [illegible] B_1
[illegible] B_2
ومنه لا تكون [illegible] السرعتين بعد الصدم.

نظرية الطاقة الحركية: يوجد لها ثلاث أشكال:

① تفاضلي
② تكاملي محدد
③ تكاملي غير محدد

1- إذا كان لدينا مجموعة مادية S عدد نقاطها n وهي $A_1, A_2, \dots, A_n$ وكتلها $m_1, m_2, \dots, m_n$ وسرعتها $\vec{V_1}, \vec{V_2}, \dots, \vec{V_n}$ فإن الطاقة الحركية المجموعة S كاملة هي:

$$d\vec{T}(S) = dA^{ext} + dA^{int}$$

حيث:

$dA^{ext} = \sum \vec{F_i}^{ext} \cdot dr_i \quad ; \quad \vec{OA_i} = \vec{r_i}$ العمل الجزئي للقوى الخارجية المؤثرة في كافة نقاط المجموعة S.

$dA^{int} = \sum \vec{F_i}^{int} \cdot dr_i \quad ; \quad \vec{OA_i} = \vec{r_i}$ العمل الجزئي للقوى الداخلية المؤثرة في كافة نقاط المجموعة S.

• بشكل عام: أعمال القوى الداخلية موجودة.
ولكن في الجملة المتماسكة أو فيما ثابتة الشكل تكون أعمال القوى الداخلية معدومة.

الموضوع

البرهان: نأخذ النقطة A_i فتكون الطاقة الحركية لها

$$d\left(\frac{1}{2} m_i \vec{V}_i^2\right) = \vec{F}_i^{ext} \cdot d\vec{r}_i + \vec{F}_i^{int} \cdot d\vec{r}_i$$

نجمع العلاقات من 1 إلى n

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} d\left(\frac{1}{2} m_i \vec{V}_i^2\right) = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{ext} \cdot d\vec{r}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{int} \cdot d\vec{r}_i$$

$$\Rightarrow d \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2} m_i \vec{V}_i^2\right) = dA^{ext} + dA^{int}$$

حيث تمثل الطاقة الحركية للجملة المادية

$$\Rightarrow dT(S) = dA^{ext} + dA^{int} \quad ①$$

وهو الشكل التفاضلي وهو المطلوب.

- إيجاد الشكل التكاملي المحدد:
نكامل العلاقة التفاضلية ① تكاملاً محدداً بين لحظتين t_0, t_1 فنجد:

$$T_1(S) - T_0(S) = A^{ext} + A^{int} \quad ②$$

وهو الشكل التكاملي المحدد

- الطاقة الحركية بصيغتها العامة:
نكامل طرفي العلاقة ① تكاملاً غير محدد فينتج:

$$T(S) = A^{ext} + A^{int} \quad ③$$

مع ملاحظة أنه إذا كانت القوى الخارجية والداخلية كمونية أي أنها تكتب بشكل محدد وهي تابع لإحداثيات الوضع
وتكون تدرج لتابع عددي تابع لإحداثيات الحقل أي أنها مشتقة من تابع
عددي نرمز للقوى U^{int}, U^{ext} فتكون العلاقة ③ بالشكل:

$$T(S) = U^{ext} + U^{int} + const$$

م إذا كانت القوى الداخلية بين نقاط محيط غير قابل للانضغاط ويتحرك تحت تأثير الثقالة عندئذ عمل القوى الداخلية معدومة أي $W^{int} = 0$

$$\Rightarrow T(S) = V^{ext} + \text{constante}$$

وذلك استقيناه من النظريات العامة في التحريك.

* نص نظرية الطاقة الحركية صحيحة لو طبقناها على جملة مادية (S) بالنسبة لمعلم إعطالي مبدؤها مركز الثقل G :

$$\sum d \tfrac{1}{2} m_i \left[\vec{V}(G/0) + \vec{V}(A_i/G)\right]^2 = \sum \vec{F}_i^{ext} (d\vec{OG} + d\vec{GA_i}) + \sum \vec{F}_i^{int} (d\vec{OG} + d\vec{GA_i})$$

نشر التربيع ونجد

$$\Rightarrow \sum \tfrac{1}{2} d(m_i V^2(G/0)) + \sum d(m_i \vec{V}(G/0) \cdot \vec{V}(A_i/G)) + \sum \tfrac{1}{2} d(m_i V^2(A_i/G))$$
$$= \sum \vec{F}_i^{ext} d\vec{OG} + \sum \vec{F}_i^{ext} d\vec{GA_i} + \sum \vec{F}_i^{int} d\vec{OG} + \sum \vec{F}_i^{int} d\vec{GA_i}$$

$$\Rightarrow d \sum \tfrac{1}{2}(m_i V^2(G/0)) + d\sum(m_i \vec{V}(G/0) \cdot \vec{V}(A_i/G)) + d \sum \tfrac{1}{2}(m_i \vec{V}(A_i/G))$$
$$= \sum \vec{F}_i^{ext} d\vec{OG} + \sum \vec{F}_i^{ext} d\vec{GA_i} + \sum \vec{F}_i^{int} d\vec{OG} + \sum \vec{F}_i^{int} d\vec{GA_i}$$

ولكن :

1) $d\left(\sum \tfrac{1}{2} m_i\right) V^2(G/0) = \sum \vec{F}_i^{ext} d\vec{OG} + \sum \vec{F}_i^{int} d\vec{OG}$

2) $d\left[\sum(m_i \vec{V}(A_i/G)) \cdot \vec{V}(G/0)\right] = 0$

$= d \sum m_i \vec{GA_i}$

$= (\sum m_i) \vec{GG} = 0$

وبالتالي $d \sum \tfrac{1}{2}(m_i \vec{V}(A_i/G)) = \sum \vec{F}_i^{ext} d\vec{GA_i} + \sum \vec{F}_i^{int} d\vec{GA_i}$

الموضوع

$$\Rightarrow \; dT(S/G) = \sum \vec{F}_i^{ext} \, d\vec{GA}_i + \sum \vec{F}_i^{int} \, d\vec{GA}_i$$

وهي الصيغة التفاضلية بالنسبة لـ G في نظرية الطاقة.

بالمكاملة الجملة عن

$$T_{1C} - T_{0C} = \int \sum \vec{F}_i^{ext} \, d\vec{GA}_i + \int \sum \vec{F}_i^{int} \, d\vec{GA}_i$$

بالتكامل غير المحدد

$$T_C = \int \sum \vec{F}_i^{ext} \, d\vec{GA}_i + \int \sum \vec{F}_i^{int} \, d\vec{GA}_i + const$$

note: الناظم المشترك تكرتي أو دا ئرتي هو خط
أما المحور المشترك تكرتي هو مستوي ما المحور المشترك دا ئرتي هو خط.

انتهت المحاضرة السادسة